Resolução da Prova de Matemática

Professor Rossato,

a sua vibração por uma Educação de qualidade será indelével em nossos corações.

Saudade,
Equipe Pódion

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Nossos Principais Resultados

IME / ITA

2009 – 18 aprovações

2010 – 16 aprovações

2011 – 15 aprovações

2012 – 17 aprovações

2013 – 25 aprovações

2014 – 26 aprovações

2015 – 24 aprovações

Aprovados IME 2015

Alexandre Lima Meuren
Allyson Mikael Alves
Amon Rhaniery Brito Machado
André Luis de Alcantara Ramos
Arturo de Souza
Bruno Doria Milanez
Eric Toshio Endo Soares
Gabriel Sena Galvão
Guilherme Oliveira Dias dos Santos
Leonardo Gomes Gonçalves
Lucas Diniz de Andrade Pereira
Maria Clara Sagratzki Soares
Matheus Oliveira Franca
Natalia Maria Salgado Costa Moreira
Rafael Araujo França
Thiago Menck Pfeifer Macedo
Vinicius da Silva Gonzales
Vitor Amor Wolfgram
Yuhzo Uchigasaki Breyer

Aprovados ITA 2015

Gabriel Sena Galvão
Lucas Diniz de Andrade Pereira
Matheus Oliveira França
Vinicius da Silva Gonzales
Yuhzo Uchigasaki Breyer

Aprovados IME 2016

Alexandre Marne Webster
Alexandre Tabosa Santiago
Danilo Marinho Fernandes
Danilo Ramos Rodrigues Figueiredo
Eduardo Willrich Padilha Padovany
Helena Santos Brandão
Leonardo Gomes Gonçalves
Lucas Gabriel Lima Lopes
Lucas José Veloso de Souza
Rafael Ribeiro de Santana
Renan Bispo Salvador
Thallyo Yuri Caetano Pereira
Thiago Rodrigues de Oliveira Tonaco
Victor Gabriel Morele Duarte

Aprovados ITA 2016

Felipe dos Santos Bonfim
Lucas Gabriel Lima Lopes
Renan Bispo Salvador

Concurso de Bolsas 19 Dezembro

Inscrições Abertas!

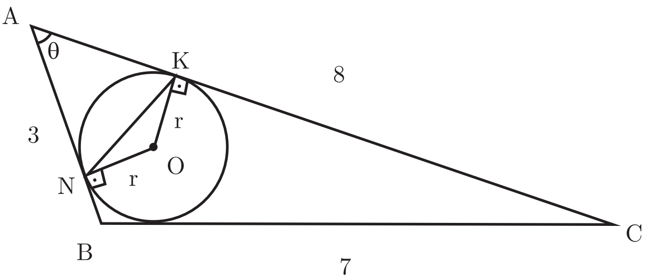
ENSINO MÉDIO | PRÉ-VESTIBULAR | CURSOS ESPECIAIS
SHCGN 712 - Conjunto B - Asa Norte Via W4 / Fone: (61) 3272-7742
email: podion@podion.com.br | website: www.podion.com.br

QUESTÃO 1. Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem $AB = 3$ cm, $BC = 7$ cm e $CA = 8$ cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

a) 2.
b) $2\sqrt{2}$.
c) 3.
d) $2\sqrt{3}$.
e) $\dfrac{7}{2}$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa A**

Temos:



2p = perímetro

$2p = 8 + 7 + 3 = 18$

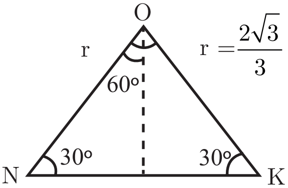
$p = \dfrac{18}{2} = 9$

$$\text{Área } \Delta\ ABC = p \cdot r = \sqrt{p \cdot (p - A)(p - B)(p - C)} \Rightarrow$$
$$g \cdot r = \sqrt{9 \cdot (9-3)(9-8)(9-7)} = 6\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Seja $B\hat{A}C = \theta$, pela lei dos cossenos:

$$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2(3)(8) \cdot \cos\theta \Rightarrow \ -24 = -48\cos\theta \Rightarrow \ \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

Portanto, $K\hat{O}N = 120^\circ$



$r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Temos:

$$\frac{\overline{NK}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{NK} = 2$$

QUESTÃO 2. Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$.

b) $3x^2 + 6x + 8$.

c) $13x^2 + 16x + 12$.

d) $7x^2 + 5x + 9$.

e) $9x^2 + 3x + 10$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa C**

Temos: $x^3 = x + 2 \Rightarrow (x^3)^3 = (x + 2)^3 \Rightarrow$

$x^9 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Substituindo $x^3 = x + 2$, temos:

$x^9 = x + 2 + 6x^2 + 12x + 8 = 6x^2 + 13x + 10$

Multiplicando por x:

$x^{10} = 6x^3 + 13x^2 + 10x$

Novamente, substituindo $x^3 = x + 2$:

$x^{10} = 6(x + 2) + 13x^2 + 10x = 6x + 12 + 13x^2 + 10x \Rightarrow$

$x^{10} = 13x^2 + 16x + 12$

QUESTÃO 3. Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então $a + b$ é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

RESOLUÇÃO: Alternativa B

Vamos montar o termo geral do desenvolvimento do binômio:

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} \cdot (ax)^{12-k} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{k} = \binom{12}{k} a^{12-k} \cdot x^{12-k} \cdot (\text{-}b)^{k} \cdot x^{-\frac{k}{2}} \Rightarrow$$

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} a^{12-k} \cdot (\text{-}b)^{k} \cdot x^{12-k-\frac{k}{2}}$$

No termo independente, o expoente de x é zero, então:

$$12 - k - \frac{k}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 8 \qquad \text{então :}$$

$$T_9 = \binom{12}{8} \cdot a^{12-8} \cdot (-b)^{8}, \text{ que vale 7920, pelo enunciado.}$$

Então: $\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot a^4 \cdot b^8 = 7920 \Rightarrow a^4\ b^8 = 16 \Rightarrow$

$$a \cdot b^2 = 2$$

Como a e b são termos de uma PG de razão $\frac{1}{2}$, temos:

$$b = a \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a{=}2b \quad \Rightarrow \quad (2b)b^2 = 2 \Rightarrow b^3 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$1 = a \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Portanto, $a + b = 1 + 2 = 3$

QUESTÃO 4. Considere as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes, *a, b, c* e *d* é dada por

a) $b + ad = d + bc.$

b) $d + ba = c + db.$

c) $a + db = b + cd.$

d) $b + ac = d + ba.$

e) $c + da = b + cd.$

RESOLUÇÃO: **Alternativa A**

Vamos montar as funções inversas:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow x = a \cdot f^{-1}(y) + b \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{x - b}{a}$$

$$g(x) = cx + d \Rightarrow x = c \cdot g^{-1}(y) + d \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{x - d}{c}$$

Fazendo as composições:

$$f^{-1}(g^{-1}(y)) = \frac{\frac{x-d}{c} - b}{a} = \frac{x - d - bc}{ac}$$

$$g^{-1}(f^{-1}(y)) = \frac{\frac{x-b}{a} - d}{c} = \frac{x - b - ad}{ac}$$

Igualando:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \Rightarrow \frac{\cancel{x} - d - bc}{\cancel{ac}} = \frac{\cancel{x} - b - ad}{\cancel{ac}} \Rightarrow b + ad = d + bc$$

QUESTÃO 5. Sejam x_1, ..., x_5 e y_1, ..., y_5 números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5 x 5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j$, $1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

RESOLUÇÃO: **Alternativa B**

Seja A a matriz associada ao sistema AX = B, onde

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & x_2+y_4 & x_2+y_5 \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & x_3+y_4 & x_3+y_5 \\ x_4+y_1 & x_4+y_2 & x_4+y_3 & x_4+y_4 & x_4+y_5 \\ x_5+y_1 & x_5+y_2 & x_5+y_3 & x_5+y_4 & x_5+y_5 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \\ x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 \\ x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_5-x_1)\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Assim, maior determinante não nulo é 2, a maior característica possível é 2.

QUESTÃO 6. Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo $m > n$. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é $15/11$. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

a) 2 e 11.

b) 3 e 10.

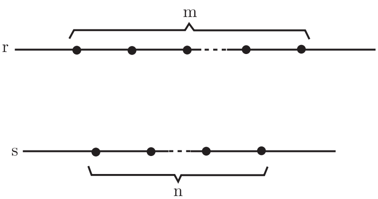
c) 4 e 9.

d) 5 e 8.

e) 6 e 7.

RESOLUÇÃO: **Alternativa E**

Temos:



Para formar triângulos, precisamos escolher uma base e um vértice oposto. Escolhendo a base em r e o vértice em s, temos: $\binom{m}{2} \cdot n$

Escolhendo a base em s e o vértice em r, temos: $\binom{n}{2} \cdot m$.

Total de triângulos: $\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m$

Para formar quadriláteros convexos, precisamos escolher um lado em r e outro em s.

Temos: $\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}$

Então:

$$\frac{\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}}{\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m} = \frac{15}{11} \Rightarrow \frac{\dfrac{m \cdot (m-1) \cdot n(n-1)}{4}}{\dfrac{m \cdot (m-1) \cdot n + n \cdot (n-1) \cdot m}{2}} = \frac{15}{11} \Rightarrow$$

$11(m \cdot n - m - n + 1) = 15 \cdot 2 \cdot (m + n - 2)$

Como $m + n = 13 \Rightarrow m = 13 - n$. Substituindo:

$11 \cdot ((13 - n) \cdot n - (13 - n) - n + 1\ ) = 30\ (13 - n + n - 2) \Rightarrow$

$\cancel{11}\ (-n^2 + 13n - 13 + n - n + 1) = 30(\cancel{11}) \Rightarrow -n^2 + 13n - 42 = 0 \Rightarrow n' = 6$ ou $n'' = 7$

Como $m > n$, e $m + n = 13$, devemos ter: $n = 6$ e $m = 7$

QUESTÃO 7. Considere a definição: duas circunferências são *ortogonais* quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências C_1: $x^2 + (y + 4)^2 = 7$, $C_2 : x^2 + y^2 = 9$ e $C_3 : (x - 5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que

a) somente C_1 e C_2 são ortogonais.

b) somente C_1 e C_3 são ortogonais.

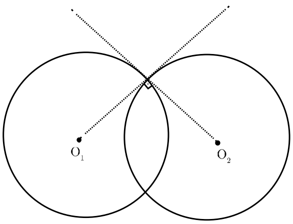
c) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

d) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.

e) não há ortogonalidade entre as circunferências.

RESOLUÇÃO: **Alternativa C**

Vamos observar quando duas circunferências são ortogonais:



Para que as tangentes sejam perpendiculares, é necessário que intersectem os centros das circunferências, pois o raio é sempre perpendicular à tangente, portanto, para que duas circunferências sejam ortogonais, a distância entre os centros deve ser a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são os raios. Vamos analisar:

C_1: centro $O_1 = (0,-4)$ Raio $r_1 = \sqrt{7}$

C_2: centro $O_2 = (0,0)$ Raio $r_2 = \sqrt{9} = 3$

C_3: centro $O_3 = (5,0)$ Raio $r_3 = \sqrt{16} = 4$

Temos:

$\overline{O_1O_2} = \sqrt{4^2} = 4$ $\qquad r_1^2 + r_2^2 = 7 + 9 = 16 = \left(\overline{O_1O_2}\right)^2$

Portanto, C_1 e C_2 são ortogonais.

$\overline{O_1O_3} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ $\qquad r_1^2 + r_3^2 = 7 + 16 = 23 \neq \left(\overline{O_1O_3}\right)^2$

Portanto, C_1 e C_3 não são ortogonais.

$\overline{O_2O_3} = \sqrt{5^2} = 5$ $\qquad r_2^2 + r_3^2 = 9 + 16 = 25 = \left(\overline{O_2O_3}\right)^2$

Portanto, C_2 e C_3 são ortogonais.

QUESTÃO 8. As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

c) $\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2}$.

e) $3\sqrt{2}$.

RESOLUÇÃO: Alternativa D

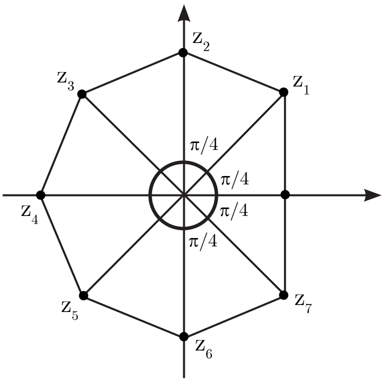
1. $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = \dfrac{z^8 - 1}{z-1}$

Para $z \neq 1$, logo as raízes do polinômio, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, serão as raízes do polinômio $z^8 - 1$ excluindo-se $z = 1$. Sendo assim, temos:

$z^8 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[8]{1} \Rightarrow z_k = \text{cis}\dfrac{k\pi}{4}$

Com $k = 0, 1, ..., 7$, porém para $k = 0$ teríamos $Z_0 = 1$, logo as raízes do polinômio

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$ serão do tipo $z_k = \text{cis}\dfrac{k\pi}{4}$, com $k = 1, 2, ..., 7$, cuja representação no plano complexo seria o polígono abaixo:



2. A área de tal polígono é dada por:

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \frac{1 \cdot 1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}+1}{2}$$

QUESTÃO 9. Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq 1$.

c) $1<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{3}{2}$.

d) $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq 2$.

e) $2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

RESOLUÇÃO: Alternativa E

$$\log_2 \pi = a \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_\pi 2$$
$$\log_5 \pi = b \Rightarrow \frac{1}{b} = \log_\pi 5$$

Logo, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10$

Seja, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = x \Rightarrow x = \log_\pi 10 \Rightarrow \pi^x = 10$

Suponha $\pi = 3{,}15$ e $x = 2 \Rightarrow 3{,}15^2 = 9{,}9225 < 10$

Logo, como $\pi < 3{,}15$, temos que $x > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} > 2$

QUESTÃO 10. O lugar geométrico das soluções da equação $x^2 + bx + 1 = 0$, quando $\left|b\right| < 2$, $b \in \mathbb{R}$, é representado no plano complexo por

a) dois pontos.

b) um segmento de reta.

c) uma circunferência menos dois pontos.

d) uma circunferência menos um ponto.

e) uma circunferência.

RESOLUÇÃO: **Alternativa C**

$x^2 + bx + 1 = 0$

$\left|b\right| < 2 \Rightarrow -2 < b < 2$ e $b^2 < 4 \therefore b^2 - 4 < 0$

Achando as raízes, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2} \quad \text{como } b^2 - 4 < 0 \Rightarrow \text{raízes complexas}$$

Chamando as raízes de z:

$$z = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2} i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2} i \\ z_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2} i \end{cases}$$

Analisando as raízes $z = x + yi$, temos:

$$\left.\begin{cases} x = -\frac{b}{2} & \therefore \quad x^2 = \frac{b^2}{4} \\ y = \pm\frac{\sqrt{4 - b^2}}{2} & \therefore \quad y^2 = \frac{4 - b^2}{4} = 1 - \frac{b^2}{4} \end{cases}\right\} x^2 + y^2 = 1$$

(Circunferência de raio 1 e centro na origem)

Entretanto, como b varia no intervalo (–2,2), excluem-se os pontos:

$$b = 2 \Rightarrow z = -\frac{2}{2} \pm 0i \Rightarrow (-1, 0)$$

$$b = -2 \Rightarrow z = \frac{2}{2} \pm 0i \Rightarrow (1, 0)$$

Lugar geométrico:

Circunferência centrada na origem, de raio 1, excetuando-se 2 pontos: (–1, 0) e (1, 0)

QUESTÃO 11. Em um triângulo de vértice A, B e C são dados $\hat{B} = \pi/2$, $\hat{C} = \pi/3$ e o lado $BC = 1$ cm. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, é

a) $\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

b) $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$.

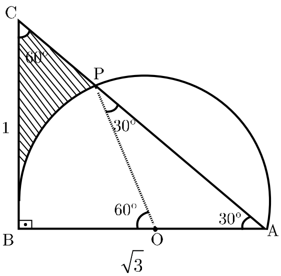
c) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

d) $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$.

e) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa D**

Temos a seguinte figura:



Como $\overline{BC} = 1$ e $B\hat{C}A = 60^o$, então $\overline{AB} = \sqrt{3}$.

Seja O o ponto médio de $\overline{AB}$ (O é o centro da circunferência) e P o ponto de intersecção da circunferência de centro O com o lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC. Portanto, a área da figura hachurada será igual à área Δ_{ABC} – área setor BOP – área Δ_{OAP}.

Temos:

$$\text{Área } \Delta_{ABC} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área}_{\text{setor BOP}} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{60}{360} = \pi \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Área } \Delta_{OAP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \text{ sen } 120^o \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

Então:

$$\text{Área}_{\text{hachurada}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{8\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$$

QUESTÃO 12. Com relação à equação $\dfrac{\text{tg}^3 x - 3\text{tg}x}{1 - 3\text{tg}^2 x} + 1 = 0$, podemos afirmar que

a) no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

e) existem duas soluções no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa B**

Temos: $\dfrac{\text{tg}^3\text{x} - 3\text{tgx}}{1 - 3\text{tg}^2\text{x}} + 1 = 0$

Condição de existência:

$$1 - 3\text{tg}^2\text{x} \neq 0 \Rightarrow \text{tg}^2\text{x} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{tgx} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{x} \neq \frac{\pi}{6} + \text{k}\pi, \text{k} \in \mathbb{Z}.$$

Voltando para a equação:

$$\frac{\text{tg}^3\text{x} - 3\text{tgx}}{1 - 3\text{tg}^2\text{x}} = -1 \Rightarrow \text{tg}^3\text{x} - 3\text{tgx} = 3\text{tg}^2\text{x} - 1 \Rightarrow \text{tg}^3\text{x} - 3\text{tg}^2\text{x} - 3\text{tgx} + 1 = 0$$

Por inspeção, observa-se que uma das raízes dessa equação é tgx = – 1. Portanto, temos:

$$\left(\text{tgx} + 1\right)\left(\text{tg}^2\text{x} - 4\text{tgx} + 1\right) = 0$$

Vamos encontrar mais duas soluções:

$$\text{tg}^2\text{x} - 4\text{tgx} + 1 = 0 \Rightarrow \text{tgx} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Portanto, temos as seguintes soluções:

Se $\text{tgx} = -1 \Rightarrow \text{x} = \dfrac{3\pi}{4} + \text{k}\pi,\ \text{k} \in \mathbb{Z}.$

Se $\text{tgx}=2+\sqrt{3} \Rightarrow \text{x} = \dfrac{5\pi}{12} + \text{k}\pi,\ \text{k} \in \mathbb{Z}.$

Se $\text{tgx}=2-\sqrt{3} \Rightarrow \text{x} = \dfrac{\pi}{12} + \text{k}\pi,\ \text{k} \in \mathbb{Z}.$

Analisando as raízes no intervalo $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, são elas: $\dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{\pi}{12}$ e $\dfrac{5\pi}{12}$.

Somando-as:

$$\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{-\pi}{4} + \frac{6\pi}{12} = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > 0.$$ Logo, alternativa B.

QUESTÃO 13. Sejam A e B matrizes quadradas n x n tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade n x n. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;

II. $I_n - A$ é inversível;

III. $A \cdot B = B \cdot A$.

É (são) verdadeira(s)

a) Somente I.

b) Somente II.

c) Somente III.

d) Somente I e II.

e) Todas.

RESOLUÇÃO: Alternativa E

De $A + B = A \cdot B$:

$$A - AB + B - I_n = -I_n$$

$$A(I_n - B) - (I_n - B) = -I_n$$

$$(A - I_n)(I_n - B) = -I_n \text{ ou}$$

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n$$

Logo:

$(I_n - A)$ e $(I_n - B)$ são inversíveis.

Ainda:

$(I_n - A)(I_n - B) = I_n = (B - I_n)(A - I_n)$, ou seja, $I_n - A - B + AB = BA - A - B + I_n$

Portanto, $AB = BA$

Conclusão: todas as afirmações são verdadeiras.

QUESTÃO 14. Se o sistema $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2a^2y+(2a^4-a)z &= 0 \\ x+ay+(a^3-1)z &= 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0,\ -1,\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $0,\ -1,\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

c) $0,\ -1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

d) $0,\ -1,\ -1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}$.

e) $0,\ 1,\ 1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa B**

$$AX = 0_3 \text{ com: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a^2 & 2a^4-a \\ 1 & a & a^3-1 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

O sistema homogêneo é SPI se $\det A = 0$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a^2 & 2a^4-a \\ 1 & a & a^3-1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & 2a^3-1 \\ 1 & a & a^3-1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, $a = 0$ é uma solução.

Se $a \neq 0$, então, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & 2a^3-1 \\ 1 & a & a^3-1 \end{vmatrix} = 0$.

Ou seja,

$$\left(2a\left(a^3-1\right)+2a^3-1\right)-\left(2a+a\left(2a^3-1\right)\right)=0$$

$$2a^4-2a+2a^3-1-2a-2a^4+a=0$$

$$2a^3-3a-1=\left(a+1\right)\left(2a^2-2a-1\right)=0$$

desse modo, $a = -1$ ou $2a^2 - 2a - 1 = 0$

Daí, se $a \neq -1$:

$$a = \frac{2 \pm 2\sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, os possíveis valores de a são: $0, -1, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

QUESTÃO 15. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{5}$.

d) $\frac{1}{7}$.

e) $\frac{1}{11}$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa D**

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Trocando a 1^a com a 2^a linha, temos:

$$p(x)\cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió para reduzir a ordem do determinante:

$$p(x)\cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x^2-3 & x^3-4 \\ 3+2 & 4+3 & 5+4 \\ 2+4 & 1+6 & 1+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x^2-3 & x^3-4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo por Sarrus:

$$p(x)\cdot(-1) = 63x - 126 + 54x^2 - 162 + 35x^3 - 140$$
$$-42x^3 + 168 - 63x + 126 - 45x^2 + 135 \Rightarrow$$
$$p(x)\cdot(-1) = -7x^3 + 9x^2 + 1 \Rightarrow P(x) = 7x^3 - 9x^2 - 1$$

Das relações de Girard, tem-se que:

$$x'\cdot x''\cdot x''' = \frac{-(-1)}{7} = \frac{1}{7}$$

QUESTÃO 16. Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm³:

a) 10.

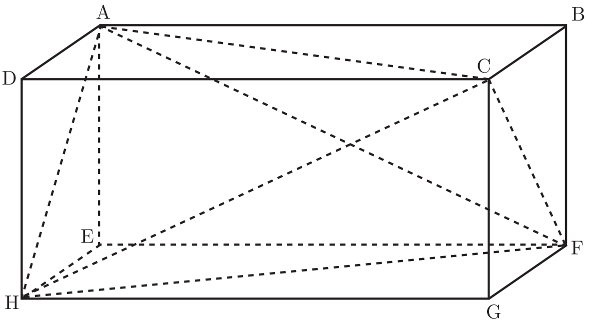
b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 30.

RESOLUÇÃO: **Alternativa D**



O tetraedro é formado pelos vértices A, C, F e H.

Basta subtrair o volume do paralelepípedo do volume das 4 pirâmides DACH, BACF, GCFH e EHFA.

Logo $V_{CAHF} = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 5$

$V_{CAHF} = 60 - 40 = 20\text{cm}^3.$

QUESTÃO 17. Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se $MN = CN = 2$ cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

a) $\dfrac{\sqrt{60}}{3}$.

b) $\dfrac{\sqrt{50}}{3}$.

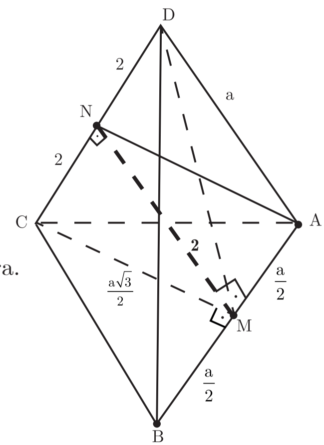
c) $\dfrac{\sqrt{40}}{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa A**

Seja "a" a medida do lado dos triângulos.



No $\Delta CMD,\ CM = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (isósceles), assim $MN \perp CD$

No ΔCMN: $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$

Como $AC = AD$, ΔACD é isósceles com $AN \perp CD$ e NA é altura.

$$a = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

No triângulo retângulo ANM:

$$AN^2 = 2^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$AN = \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{\sqrt{60}}{3}$$

QUESTÃO 18. Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$ é

a) – 96.

b) – 85.

c) 63.

d) 99.

e) 115.

RESOLUÇÃO: Alternativa A

Considerando que a "soma da progressão" equivalhe à soma dos n termos da progressão (S_n), temos:

- $S_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$

- $S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow 7 + a_2 = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 11$

Assim, a razão da P.A. será igual a 4, e a determinante será:

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 19 & 4 & 4 \\ 33 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 15 & 4 & 0 \\ 32 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} = -96$$

$(1): c_3 - c_2 \to c_3 \text{ e } c_2 - c_1 \to c_2$

$(2): c_3 - c_2 \to c_3 \text{ e } c_1 - c_2 \to c_1$

QUESTÃO 19. São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

a) $\frac{8}{15}$.

b) $\frac{7}{15}$.

c) $\frac{6}{15}$.

d) 1.

e) $\frac{17}{15}$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa E**

Caixa 1: 3 brancas, 2 pretas
Caixa 2: 2 brancas, 1 preta

Retirando-se uma bola de cada caixa, temos:

P_1 = Probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta = 1 – P(duas brancas)

$\therefore\ P_1 = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

P_2 = Probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor

$\therefore\ P_2 = P(\text{duas brancas}) + P(\text{duas pretas}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

Logo, $P_1 + P_2 = \frac{3}{5} + \frac{8}{15} = \frac{17}{15}$

QUESTÃO 20. Para que o sistema $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x^3+y^3 &= c^2 \end{cases}$ admita apenas soluções reais, todos os valores reais de c pertencem ao conjunto

a) $\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$.

b) $\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[\cup\left[\frac{1}{4},\infty\right[$.

c) $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$.

d) $\left[\frac{1}{2},\infty\right[$.

e) $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right[$.

RESOLUÇÃO: **Alternativa E**

$$\begin{cases} x+y=1 & \text{(i)} \\ x^3+y^3=c^2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

de (ii) temos que

$x^3+y^3=(x+y)\,(x^2-xy+y^2)=c^2$

$x^2-xy+y^2=c^2$

de (i) $y=1-x$, logo, segue que

$x^2-x\cdot(1-x)+(1-x)^2=c^2$

$x^2-x+x^2+1-2x+x^2=c^2$

$3x^2-3x+1-c^2=0$

Devemos ter

$\Delta=3^2-4\cdot3\cdot(1-c^2)\geq 0$

$9-12+12c^2\geq 0$

$12c^2\geq 3$

$c^2\geq\frac{1}{4}$

$|c|\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\ c\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

QUESTÃO 21. Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão – 5. Determine o número de vértices do poliedro.

RESOLUÇÃO:

Sejam f_3 e f_4 o número de faces triangulares e quadrangulares, respectivamente, temos que
PA $(A, f_3, f_4) \Rightarrow$ PA $(A, A - 5, A - 10)$
e que

$$A = \frac{3f_3 + 4f_4}{2} = \frac{3(A-5)+4(A-10)}{2}$$

$2A = 3A - 15 + 4A - 40$

$\Rightarrow 5A = 55 \therefore A = 11,$

Temos então,

$f_3 = 6$ e $f_4 = 1$
O numero de faces é $F = 6 + 1 = 7$.
E segue
$V + 7 = 11 + 2 \Rightarrow V = 6$

Resposta: O número de vértices é 6.

QUESTÃO 22. Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

RESOLUÇÃO:

$$3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$$

$$3^{x-2} + 3^{x} \cdot \sum_{k=1}^{4} 3^{k} \leq \frac{1081}{18}$$

$$3^{x}\left(\frac{1}{9} + 3 + 3^{2} + 3^{3} + 3^{4}\right) \leq \frac{1081}{18}$$

$$3^{x}\left(\frac{1}{9} + \frac{3\cdot\left(3^{4}-1\right)}{3-1}\right) \leq \frac{1081}{18}$$

$$3^{x}\left(\frac{2 + 3\cdot 80\cdot 9}{18}\right) \leq \frac{1081}{18}$$

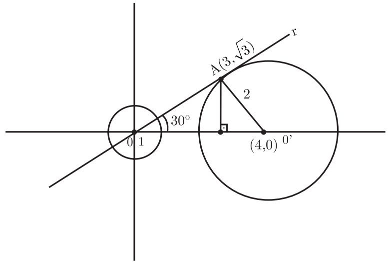
$$3^{x}\frac{(2162)}{18} \leq \frac{1081}{18}$$

$$3^{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq \log_{3}\frac{1}{2}$$

Resposta: $S = \left\{ x \in R \;/\; x \leq \log_{3}\frac{1}{2} \right\}$

QUESTÃO 23. No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A = (3, \sqrt{3})$.

RESOLUÇÃO:



$A \in C_2$

$m_r = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$\Rightarrow OA \perp O'A$

Logo $\overline{OA} = 2\sqrt{3}$

- (x, y)

Seja r o raio de C, temos que

$(r+1)^2 = r^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = r^2 + 12$

$\Rightarrow r = \dfrac{11}{2}$

1° Caso: C é tangente exterior a C_1 e interior C_2.

Para o centro, basta observar que se $C_3 = (x, y)$ são as coordenadas do centro de c então

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{11}{2} + 1\right)^2 = \frac{169}{4}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$x^2 - (x-4)^2 = \frac{120}{4}$$

$$x^2 - (x^2 - 8x + 16) = 30$$

$$8x - 16 = 30$$

$$x = \frac{46}{8} = \frac{23}{4} \Rightarrow y = -\frac{7\sqrt{3}}{4}$$

Portanto $r = \dfrac{11}{2}$ e $C_3 = \left(\dfrac{23}{4}, -\dfrac{7\sqrt{3}}{4}\right)$

2° Caso: C é tangente exteriormente a C_1 e C_2
Nesse caso temos que:

$$\overline{CO} = x^2 + y^2 = \left(\frac{11}{2} + 1\right)^2 = \frac{169}{4}$$

$$\overline{CO'} = (x-4)^2 + y^2 = \left(\frac{11}{2} + 2\right)^2 = \frac{225}{4}$$

Subtraindo as equações temos

$$x^2 - (x-4)^2 = -\frac{56}{4} = -14$$

$$8x - 16 = -14$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

Portanto $r = \dfrac{11}{2}$ e $C_3 = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{15\sqrt{3}}{4}\right)$

QUESTÃO 24. Seja $z = \cos\frac{\pi}{7} + isen\frac{\pi}{7}$. Pedem-se:

a) Use a propriedade $z^k = \cos\frac{k\pi}{7} + isen\frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{N}$, para expressar $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}$ e $\cos\frac{5\pi}{7}$ em função de z.

b) Determine inteiros a e b tais que $\frac{a}{b} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

RESOLUÇÃO:

a) Observe que

$$z^{-k} = \cos\left(-\frac{k\pi}{7}\right) + i\ \text{sen} - \frac{k\pi}{7} = \cos\frac{k\pi}{7} - i\ \text{sen}\frac{k\pi}{7}$$

$$\Rightarrow z^k + z^{-k} = 2\cos\frac{k\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$$

Portanto

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

$$\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}(z^3 + z^{-3})$$

$$\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}(z^5 + z^{-5})$$

$$\cos\frac{3\pi}{7} + i\ \text{sen}\frac{3\pi}{7}$$

b) Considere a equação $z^1 + 1 = 0$, temos que $z^7 + 1 = (z + 1)\ (z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$

Tomando $z \neq 1$, temos que

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z^6 - z^3 + z^4 - z - z^5 + z^2 = -1$$

$$z^3\ (z^3 - 1) - z^2\ (z^3 - 1) + z(z^3 - 1) = -1$$

$$z^3 - z^2 + z = \frac{-1}{z^3 - 1} = \frac{1}{1 - z^3}$$

Observe que $z^3 - z^2 + z =$

$$\text{cis}\frac{\pi}{7} + \text{cis}\frac{3\pi}{7} + \text{cis}\frac{5\pi}{7}$$

$$= \text{cis}\frac{\pi}{7} + \text{cis}\frac{3\pi}{7} + \text{cis}\frac{5\pi}{7}$$

Logo

$$\text{Re}\ (z^3 - z + z) = \text{Re}\ \left(\frac{1}{1 - z^3}\right) = \frac{1}{2}$$

Observe que

$z = \cos t + i\ \text{sen} t$

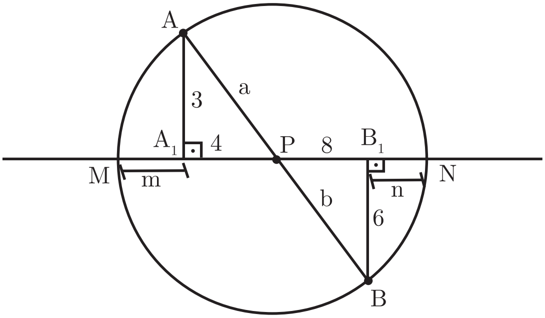
$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - \cos t - i\ \text{sen} t} = \frac{1}{2\text{sen}^2\frac{t}{2} - 2i\ \text{sen}\frac{t}{2}\ \cos\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\text{sen}\frac{t}{2}(\text{sen}\frac{t}{2} - i\ \cos\frac{t}{2})} = \frac{\text{sen}\frac{t}{2} + i\ \cos\frac{t}{2}}{2\ \text{sen}\frac{t}{2}\left(\text{sen}^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{2t}{2}\right)}$$

$$= \frac{\text{sen}\frac{t}{2} + i\ \cos\frac{t}{2}}{2\text{sen}\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + i\frac{\cos\frac{t}{2}}{\text{sen}\frac{t}{2}}$$

QUESTÃO 25. Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere A e B tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3$, $d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N. Determine a menor distância possível entre os pontos M e N.

RESOLUÇÃO:



Temos que

$a + b = 15$ e $\frac{3}{6} = \frac{a}{b}$, logo

$a + b = 15$ e $b = 2a \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$ e $b = 10$

Logo

$A_1P = 4$ e $B_1P = 8$, ainda, ainda $MA_1 = m$ e $NB_1 = n$

Logo

$(m + 4)(n + 8) = 5 . 10$

$\overline{MN} = d = m + n + 12$

Mas $\sqrt{(m+4)(n+8)} \leq \frac{m+r+12}{2}$ (desigualdade entre a média aritmética e geométrica)

$\Leftrightarrow m + n + 12 \geq 2\sqrt{50}$

$\Leftrightarrow d \geq 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$

QUESTÃO 26. De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0 \leq k - r \leq 6$ e $0 \leq k \leq 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma $\displaystyle\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r}$.

RESOLUÇÃO:

$$16 \text{ bolas} \begin{cases} 10 \text{ brancas} \\ \\ 6 \text{ pretas} \end{cases}$$

a) Ao selecionarmos k bolas, se r forem brancas, então k – r serão pretas. Logo, seja

R = número de bolas brancas:

$$P\left(R=r\right)=\frac{\binom{10}{r}\cdot\binom{6}{k-r}}{\binom{16}{k}}, \text{ com } \begin{cases} 0 \leq k \leq 10 \\ 0 \leq k-r \leq 6 \\ \Rightarrow k-6 \leq r \leq k \\ \Rightarrow 0 \leq r \leq 10 \end{cases}$$

b) Use o item(a) para calcular a soma $\displaystyle\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r}$

Na letra (a), ao considerarmos k = 6, podem ser selecionados de 0 a 6 bolas brancas, de tal forma que

$$\sum_{r=0}^{6} P(R=r)=1 \Rightarrow \sum_{r=0}^{6} \frac{\binom{10}{r}\cdot\binom{6}{6-r}}{\binom{16}{6}}=1 \Rightarrow \sum_{r=0}^{6}\binom{10}{r}\cdot\binom{6}{6-r}=\binom{16}{6}=\frac{16!}{10!6!}=8008$$

QUESTÃO 27. Quantos pares de números inteiros positivos *(A, B)* existem cujo mínimo múltiplo comum é 126.10^3? Para efeito de contagem, considerar $(A,\ B) \equiv (B,\ A)$.

RESOLUÇÃO:

Observe que

$$\text{MMC}(A,B) = 126 \cdot 10^3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Os número A e B são tais que

$$A = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot 7^{\theta_1}$$

$$B = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot 7^{\theta_2}$$

Logo segue que

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = 4$$

$$\max\{\beta_1, \beta_2\} = 2$$

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} = 3$$

$$\max\{\theta_1, \theta_2\} = 1$$

Contando os pares de expoentes

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (4,0);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(0,4);(1,4);(2,4);(3,4),\ \text{9 casos}$$

$$(\beta_1, \beta_2) = (2,0);(2,1);(2,2);(0,2);(1,2),\ \text{5 casos}$$

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (3,0);(3,1);(3,2);(3,3);(0,3);(1,3);(2,3),\ \text{7 casos}$$

$$(\theta_1, \theta_2) = (1,0);(1,1);(0,1),\ \text{3 casos}$$

Temos o número de pares (A,B) igual a

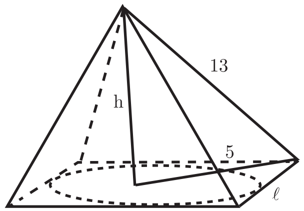
$$\frac{9 \times 5 \times 7 \times 3 - 1}{2} + 1 = 472 + 1 = 473$$

Observe que o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\theta_1 = \theta_2$ é contado apenas uma única vez.

Portanto há 473 pares (A,B) de inteiros positivos tais que $\text{MMC}(A,B) = 126 \cdot 10^3$.

QUESTÃO 28. A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2}$. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

RESOLUÇÃO:



1. $\cancel{\pi}R^2 = \frac{25\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow R\frac{5}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \ell = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow d = \ell\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 10$

2. $h^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

$h = 12$

3. Volume da pirâmide:

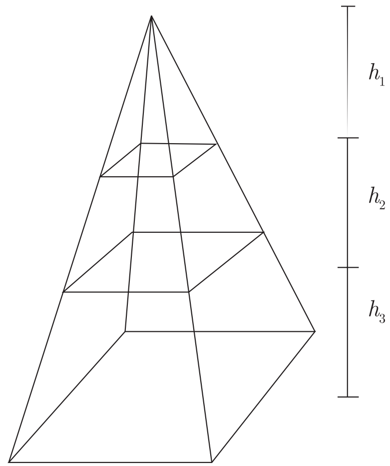
$v = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\left(5\sqrt{2}\right)^2\cdot\cancel{12} = 25\cdot 2\cdot 4 = 200cm^3$

Cada sólido tem volume $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{200}{3}$

Se v_1 é a menor pirâmide formada, temos que:

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{12}{h_1}\right)^3 \Rightarrow 3 = \left(\frac{12}{h_1}\right)^3 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}$$

Vamos calcular, agora, as alturas dos dois troncos.



$$\frac{v}{2v_1} = \left(\frac{12}{h_1 + h_2}\right)^3$$

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{12}{h_1 + h_2}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \left(\frac{12}{h_1 + h_2}\right)$$

$$h_1 + h_2 = 12\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$h_2 = \frac{12\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} - \frac{12}{\sqrt[3]{3}} = 12\left(\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

E temos que

$$h_3 = 12 - 12\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 12\left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$$

Logo,

$$h_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}},\ h_2 = 12\left(\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{3}}\right) \text{ e } h_3 = 12\left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right).$$

QUESTÃO 29. Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

RESOLUÇÃO:

Observe que

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$$

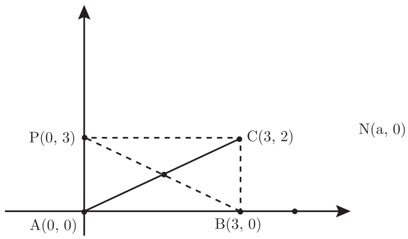
e

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1) \cdot (x - 2)^2$$

Portanto o menor grau de p(x) é 4.

QUESTÃO 30. No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0,3)$ e o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ e $C = (3,2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo em ABC em duas regiões de mesma área.

RESOLUÇÃO:



1. reta que passa pelos pontos P e N

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + ay = a$$

2. reta que passa por P e B

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow x + y = 3$$

3. reta $\overleftrightarrow{AC}$

$$y = \frac{2}{3}x$$

Interseção entre (2) e (3)

$$x + \frac{2}{3}x = 3$$

$$5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5} \text{ e } y = \frac{6}{5}$$

4. Área do triângulo ABD

$$S_{ABD} = 3 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{5} = 1,8$$

5. Área do triângulo ABC

$$S_{ABC} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Como $S_{ABD} > \frac{1}{2} S_{ABC}$ devemos ter

$0 < a < 3,\ N = (a,\ 0)$

6. Interseção de (1) e (3) (ponto D)

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}y \\ 3x + ay = 3a \end{cases}$$

$$3 \cdot \frac{3}{2}y + ay = 3a \Rightarrow 9y + 2ay = 6a$$

$$y = \frac{6a}{9 + 2a}$$

7. Área do Δ AND

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{6a}{9 + 2a} \cdot a = \frac{3}{\cancel{2}}$$

$$6a^2 = 27 + 6a$$

$$2a^2 - 2a - 9 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 72}}{4}$$

Portanto

$$a = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{4} \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{e } N = \left(\frac{1 + \sqrt{19}}{2},\ 0 \right)$$