Considere as retas de equações

$$r : y = \sqrt{2}x + a \quad \text{e} \quad s : y = bx + c,$$

em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por $(0,1)$ e s, por $\left(\sqrt{2},4\right)$, determine a área do triangulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

RESOLUÇÃO:

$$r : y = \sqrt{2}x + a$$
$$s : \mathrm{y} = \mathrm{bx} + \mathrm{c}$$
$$r \perp s \therefore b = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se r passa por $(0,\ 1)$: $a = 1$

Se s passa por $(\sqrt{2}\ ,\ 4)$

$$4 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} + c$$

$$4 = -1 + \mathrm{c},\ \mathrm{c} = 5$$

Graficamente:

$$r : y = \sqrt{2}x + 1$$

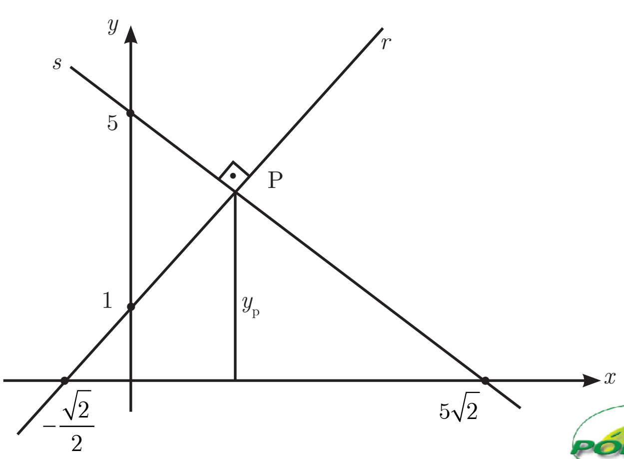
x	y
0	1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

$$s : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 5$$

x	y
0	5
$5\sqrt{2}$	0

Determinação de P:

$$\sqrt{2}x_p + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_p + 5$$
$$2\sqrt{2}x_p + 2 = -\sqrt{2}x_p + 10$$
$$3\sqrt{2}x_p = 8$$
$$x_p = \frac{8}{3\sqrt{2}}$$
$$y_p = \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{3\cancel{\sqrt{2}}} + 1$$
$$y_p = \frac{11}{3}$$
$$\mathrm{A}\Delta = \frac{\mathrm{b}h}{2} = \frac{\left(5\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{11}{3}}{2}$$
$$= \frac{11\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{11}{6} = \frac{121\sqrt{2}}{12}$$



Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

RESOLUÇÃO:

$$4^{3x-1} > 3^{4x}$$

$$\frac{4^{3x}}{4} > 3^{4x}$$

$$\frac{64^x}{4} > 81^x$$

$$\frac{64^x}{81^x} > 4$$

$$\log_{\frac{64}{81}}\left(\frac{64}{81}\right)^x < \log_{\frac{64}{81}} 4$$

$$x < \log_{\frac{64}{81}} 4 = \log_{\frac{8}{9}} 2$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}$$

QUESTÃO 23

Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - \left(1+2\sqrt{3}\right)x^3 + \left(3+2\sqrt{3}\right)x^2 - \left(1+4\sqrt{3}\right)x + 2.$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

RESOLUÇÃO:

a) $p(x) = \left(x^2 + ax + 1\right)\left(x^2 + bx + 2\right)$

$$p(x) = x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax^3 + abx^2 + 2ax + x^2 + bx + 2$$

$$p(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+3)x^2 + (2a+b)x + 2$$

$$Logo \begin{cases} a + b = -1 - 2\sqrt{3} \\ ab + 3 = 3 + 2\sqrt{3} \\ 2a + b = -1 - 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -2\sqrt{3} \quad \text{e} \quad b = -1}$$

b) $p(x) = 0$

$$\left(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 - x + 2\right) = 0$$

$x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

$\Delta = 12 - 4 = 8$

$x = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

ou

$x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$$S = \left\{\sqrt{3} + \sqrt{2},\ \sqrt{3} - \sqrt{2},\ \frac{1+\sqrt{7}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right\}$$

Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \to A$ existem?

RESOLUÇÃO:

n(A) = 3 e n(B) = 5

Como f : B $\to$ A, tem-se que os elementos ordenados de A, por exemplo: (a_1, a_2, a_3), devem estar relacionados com 1, 2 ou 3 elementos de B.

Seja o terno (N_1, N_2, N_3) tal que N_k representa a quantidade de elementos de B que se relacionam com a_k. Desse modo, as configurações possíveis de (N_1, N_2, N_3) são:

I. (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)
II. (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)

Em I:

Cada configuração admite:

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Logo, tem-se: 3 x 20 = 60 funções sobrejetivas.

Em II:

$$\frac{P_5}{P_2 \times P_2} = \frac{5 \times 4 \times 3}{2} = 30$$

Logo, tem-se: 3 x 30 = 90 funções sobrejetivas.

Portanto, tem-se o total de 60 + 90 = 150 funções sobrejetivas.

Resposta: 150

Sejam $A = \{1, 2, ..., 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \dfrac{3}{2}$.

b) Escreva $q = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para n.

RESOLUÇÃO:

a) PG (a_1, a_2, a_3) $q = \dfrac{3}{2}$

$$\left(a_1, \frac{3}{2}a_1, \frac{9}{4}a_1\right)$$

Se $\dfrac{3}{2}a_1 \in \mathbb{Z}_+^*$ e $\dfrac{9}{4}a_1 \in \mathbb{Z}_+^*$, então a_1 é múltiplo positivo de 4.

Logo, $a_1 = 4 \Rightarrow$ PG (4, 6, 9)
$a_1 = 8 \Rightarrow$ PG (8, 12, 18)
$a_1 = 12 \Rightarrow$ PG (12, 18, 27)

Resposta: (4, 6, 9), (8, 12, 18) e (12, 18, 27)

b) Com $q = \dfrac{m}{n} > 1 \Rightarrow m > n$.

O maior m ($m_{máx}$) deve gerar o maior n ($n_{máx}$).

Seja $a_1 = a \in A \Rightarrow a_2 = a \cdot \dfrac{m}{n}$ e $a_3 = a \cdot \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$.

Assim, para um "a" tal que

$a = p \cdot n^2$, com $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_3 = p \cdot m^2 \leq 30$

Um possível m ($m_{máx}$) é m = 5:

$a_3 = p \times 5^2 = 25p = 25 \quad (p = 1)$

Como $m > n$ e mdc (m, n) = 1, tomemos n = 4:

$a_1 = a = 1 \times 4^2 = 16 \Rightarrow a_2 = 16 \times \dfrac{5}{4} = 20$

Tem-se a PG (16; 20; 25) e $q = \dfrac{5}{4} \Rightarrow n = 4$

Se $m = 6 \Rightarrow a_3 = p \times 6^2 = 36\,p > 30$. Ou seja, de fato, $m_{máx} = 5 \Rightarrow n_{máx} = 4$

Resposta: n = 4

QUESTÃO 26

Esboce o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f\left(x\right)=\left|2^{-|x|}-\dfrac{1}{2}\right|$.

RESOLUÇÃO:

$$f\left(x\right)=\left|2^{-|x|}-\frac{1}{2}\right|$$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2^{-|x|}-\dfrac{1}{2} & se\quad 2^{-|x|}-\dfrac{1}{2}\geq 0\\ \dfrac{1}{2}-2^{-|x|} & se\quad 2^{-|x|}-\dfrac{1}{2}<0\end{cases}$$

Resolvendo:

$$2^{-|x|}\geq 2^{-1}$$
$$-|x|\geq -1$$
$$|x|\leq 1,\quad -1\leq x\leq 1$$

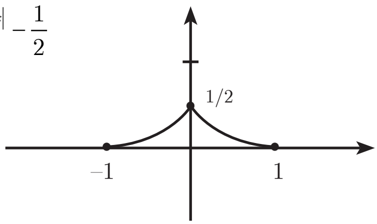
Logo:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2^{-|x|}-\dfrac{1}{2} & se\quad -1\leq x\leq 1 & (1)\\ \dfrac{1}{2}-2^{-|x|} & se\quad \mathrm{x}<-1\ ou\ x>1 & (2)\end{cases}$$

Traçando o gráfico de (1)

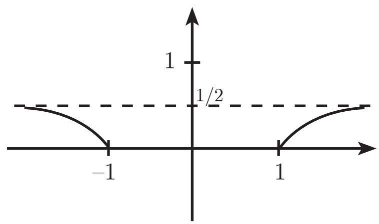
$$f\left(x\right)=2^{-|x|}-\frac{1}{2}$$

x	y
-1	0
0	$\frac{1}{2}$
1	0

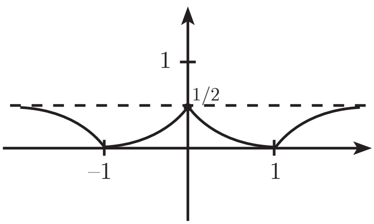


Traçando o gráfico de (2)

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}-2^{-|x|}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{|x|}}$$



Logo, o gráfico de f(x) será:



QUESTÃO 27

Determine todos os valores reais a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}.$$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 & \cdot(1) \quad \cdot(-3) \\ -x - 2y + 3z = -1 & + \\ 3x + az = 5 & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ (a-2)y + 4z = 1 & \cdot \dfrac{(3-a)}{4} \\ -3ay + (a-3)z = -1 & + \end{cases}$$

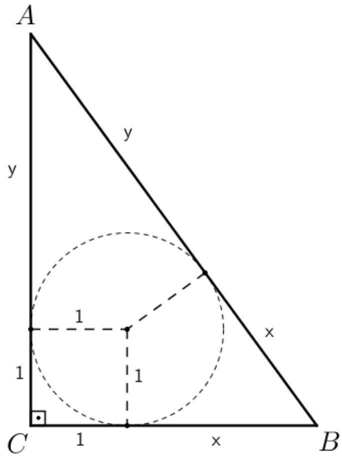
$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ (a-2)y + 4z = 1 \\ (a-2)\dfrac{(3-a)}{4}y - 3ay = \dfrac{(3-a)}{4} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-a^2 + 5a - 6 - 12a)y = -1 - a \Rightarrow (a^2 + 7a + 6)y = a + 1$$

O sistema é impossível quando $0y = k$, com $k \neq 0$, $a^2 + 7a + 6 = 0 \Rightarrow a = -6$ ou $a - 1$, para $a = -6$, $a + 1 = -5 \neq 0$, mas para $a = -1$, $a + 1 = 0$. Logo, o sistema linear é impossível apenas para $a = -6$.

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2\left(1+\sqrt{6}\right)$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

RESOLUÇÃO:



Seja AC o maior cateto

$$AB = \boxed{x + y = 2 + 2\sqrt{6}} \quad (1)$$

Se p é semiperímetro de ABC, então

$$p = x + y + 1$$
$$p = 3 + 2\sqrt{6}$$

Seja S a área de ABC, tem-se que $S = p \cdot r = \left(3+2\sqrt{6}\right)\cdot 1$

$$S = 3 + 2\sqrt{6}$$

Mas $S = \dfrac{\left(x+1\right)\left(y+1\right)}{2} = 3 + 2\sqrt{6}$

$$xy + x + y + 1 = 2\cdot\left(3+2\sqrt{6}\right)$$
$$xy + 3 + 2\sqrt{6} = 2\left(3+2\sqrt{6}\right)$$

$$\boxed{xy = 3 + 2\sqrt{6}} \quad (2)$$

De (1) e (2) decorre que $\begin{cases} x = \sqrt{6} - 1 \\ y = \sqrt{6} + 3 \end{cases}$

Ao girar o triângulo ABC em torno de AC, obtém-se um cone de raio da base $r = x + 1$, ou seja $r = \sqrt{6}$, e geratriz $g = AC = 2 + 2\sqrt{6}$.

Portanto, a área total do cone é dado por

$$A_T = \pi r\left(r+g\right) = \pi\cdot\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}\right)$$

$$\boxed{A_T = 2\pi\left(9+\sqrt{6}\right)}$$

QUESTÃO 29

Determine o conjunto das soluções reais da equação $3\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2x = 1$.

RESOLUÇÃO:

$$3\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2x = 1$$

Condições de existência:

$$\boxed{\begin{array}{l} sen\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq k\pi \Rightarrow x \neq 2k\pi \quad (*) \\ cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq (2k+1)\pi \quad (**) \end{array}}$$

Tem-se

$$3\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + tg^2x = sec^2 x$$

ou

$$\frac{3}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{cos^2 x} \qquad (1)$$

Sabe-se que:

$$cosx = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (2)$$

Com $y = sen\left(\frac{x}{2}\right)$, de (1) e (2):

$$\frac{3}{y} = \frac{1}{(1-2y)^2} \Rightarrow 3(1-2y)^2 = y$$

ou ainda:

$3\ (1 - 4y + 4y^2) = y \Rightarrow 12y^2 - 13y + 3 = 0$

Multiplicando por 12:

$(12y)^2 - 13\ .\ (12y) + 36 = 0$

Logo: $12y = 9$ ou $12y = 4 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$ ou $y = \frac{1}{3}$

(Continuação)

De $y = \frac{3}{4} : \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$

Logo: $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \qquad (3)$

De $y = \frac{1}{3} : \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Seja θ tal que $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Segue:

$\frac{x}{2} = \frac{\theta}{2} + k\pi \text{ ou } \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Assim,

$x = \theta + 2k\pi \text{ ou } (2\pi - \theta) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$x = \theta + 2k\pi \text{ ou } 2\pi(k+1) - \theta, \ k \in \mathbb{Z} \qquad (4)$

De (3) e (4):

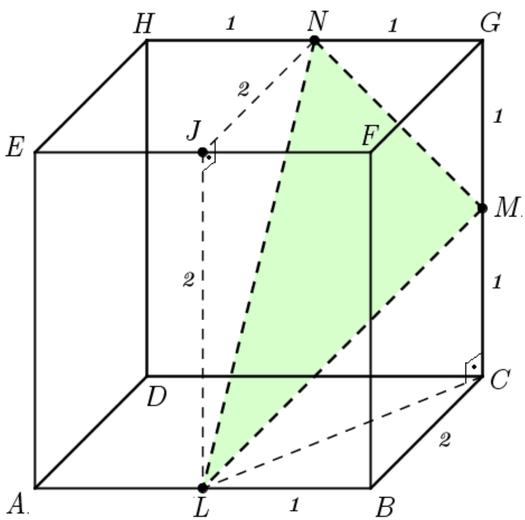
$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \theta + 2k\pi;\ 2\pi(k+1) - \theta\right\}$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $\theta = 2\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

OBS: Note que S satisfaz (*) e (**)

QUESTÃO 30

Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta 2 tal que: $ABCD$ é o quadrado da base inferior; $EFGH$, o quadrado da base superior e $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas, $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

RESOLUÇÃO:



$$\Delta NMG: NM^2 = 1^2 + 1^2$$
$$NM = \sqrt{2}$$

$$\Delta LBC: LC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\Delta LMC: LM^2 = 1^2 + LC^2$$
$$LM^2 = 1 + 5 = 6$$
$$LM = \sqrt{6}$$

$$\Delta LJN: LN^2 = 2^2 + 2^2 \quad \therefore \quad LN = 2\sqrt{2}$$

Note que ΔLMN é retângulo em M e com ângulos de 30^0 e 60^0. Sua área é dada por $S = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} \quad \therefore \quad S = \sqrt{3}$.